universität innsbruck

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Grundlagen der Ökonometrie

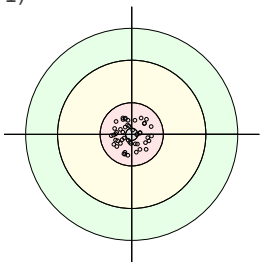
www.hsto.info/econometrics

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

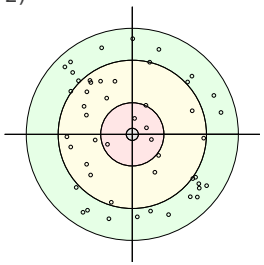
- Es gibt viele Schätzfunktionen (OLS, ML, GMM, . . .).
  Wie können diese verglichen/beurteilt werden?
  Was unterscheidet 'gute' von 'schlechten' Schätzfunktionen?
- Eigenschaften von Schätzfunktionen:
  - Erwartungstreue
  - Effizienz (Varianzminimalität)
  - Konsistenz
  - usw.
- Wie können diese Eigenschaften gezeigt/bewiesen werden?
- *Frage: Welche Annahmen müssen erfüllt sein, damit OLS-Schätzfunktionen diese Eigenschaften besitzen?*
- z.B. für Erwartungstreue und Effizienz: *Gauss-Markov Annahmen*

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

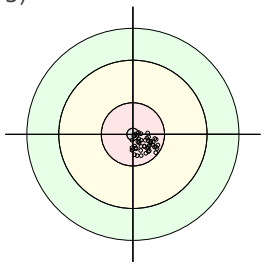
1)



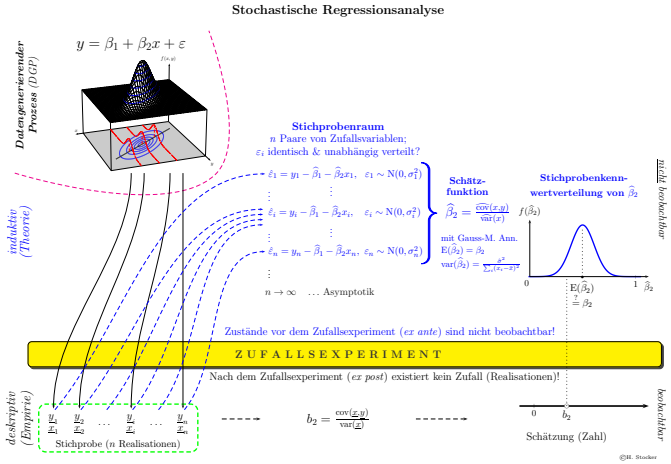
2)



3)



1) erwartungstreu und effizient,
2) erwartungstreu, aber *nicht* effizient,
3) verzerrt, also auch nicht effizient.



Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Erwartungstreue: $\mathrm{E}(\widehat{\beta}_2) \stackrel{?}{=} \beta_2$

- trifft die Schätzfunktion *'im Durchschnitt'* richtig?
- Beispiel: OLS Steigungskoeffizient:
  wir benötigen Zusammenhang zwischen $\widehat{\beta}_2$ und β_2

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(x,y)}{\widehat{\mathrm{var}}(x)}$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon \qquad \text{(PRF)}$$

- Einsetzen der PRF in OLS Schätzfunktion

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_2 &= \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(x,y)}{\widehat{\mathrm{var}}(x)} = \frac{\widehat{\mathrm{cov}}\left[x,(\beta_1+\beta_2 x+\varepsilon)\right]}{\widehat{\mathrm{var}}(x)} \\ &= \frac{1}{\widehat{\mathrm{var}}(x)}\left[\underbrace{\widehat{\mathrm{cov}}(x,\beta_1)}_{=0} + \beta_2 \underbrace{\widehat{\mathrm{cov}}(x,x)}_{=\widehat{\mathrm{var}}(x)} + \widehat{\mathrm{cov}}(x,\varepsilon)\right]\end{aligned}$$

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Erwartungstreue: $\mathrm{E}(\widehat{\beta}_2) \stackrel{?}{=} \beta_2$

$$\widehat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(x,\varepsilon)}{\widehat{\mathrm{var}}(x)}$$

Deshalb

$$\boxed{\mathrm{E}(\widehat{\beta}_2) = \beta_2 \quad \text{wenn und nur wenn } \mathrm{E}(\widehat{\mathrm{cov}}(x,\varepsilon)) = 0}$$

$\Rightarrow$ OLS Schätzfunktion ist erwartungstreu, wenn

A1: PRF linear und korrekt spezifiziert

A2: $n \geq k$ und keine perfekte Multikollinearität

A3: $\mathrm{E}(\widehat{\mathrm{cov}}(x,\varepsilon)) = 0$ [bzw. allgem.: $\mathrm{E}(\varepsilon|x) = \mathrm{E}(\varepsilon) = 0$]

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Erwartungstreue:

ad A3: wenn $\mathrm{E}(\widehat{\mathrm{cov}}(x,\varepsilon)) \neq 0$ ist ε eine Funktion der x, also $\varepsilon(x)$

PRF: $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon(x)$

mit dem marginalen Effekt

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\beta_2 + \frac{d\varepsilon}{dx}}_{\beta_2^*}$$

- Wir können mit OLS nur die Summe β_2^* schätzen, nicht den interessierenden Koeffizienten β_2!
- Identifikationsproblem – *Endogenität* (endogene Regressoren)
- $\Rightarrow$ OLS liefert verzerrte Ergebnisse!

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Erwartungstreue:

ad A3: Endogene Regressoren: Kernproblem der Ökonometrie

Typische Fälle:

- fehlenden relevanten Regressoren (*omitted variables bias*), unbeobachtete Heterogenität und Selektionsprobleme,
- Simultaner Abhängigkeit in interdependenten Systemen (*feed-back Mechanismen*; *omitted equation bias*).
- Messfehler in den erklärenden Variablen.

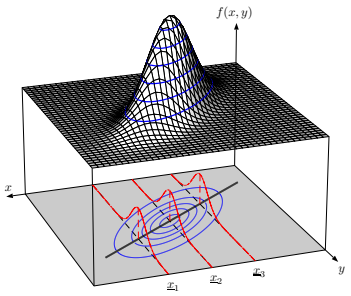
Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Stochastische Regressoren: $\rightarrow (y_i, x_i)$ *Paare* werden simultan gezogen!

Für *stochastische* Regressoren werden 2 weitere Annahmen benötigt:

AS 1: Die (x_i, y_i) Paare sind i.i.d. $\forall\, i = 1, \ldots n$,

AS 2: Große Ausreißer sind unwahrwahrscheinlich: $0 < \mathrm{E}(x_i^4) < \infty$ und $0 < \mathrm{E}(y_i^4) < \infty$



Resultate bleiben auch für stochast. Regressoren weitgehend gültig.

OLS Standardfehler

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(x,y)}{\widehat{\mathrm{var}}(x)} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\, y_i$$

weil

$$\begin{aligned}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum_i (x_i - \bar{x}) y_i - \sum_i (x_i - \bar{x})\bar{y} \\ &= \sum_i (x_i - \bar{x}) y_i - \bar{y} \sum_i (x_i - \bar{x}) \\ &= \sum_i (x_i - \bar{x}) y_i \qquad \text{weil } \sum_i (x_i - \bar{x}) = 0\end{aligned}$$

Also: OLS Schätzfunktion ist linear in y

$$\widehat{\beta}_2 = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \qquad \text{mit} \quad w_i := \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}$$

OLS Standardfehler

Für die Gewichte w_i gilt: (siehe Skript)

1. $\sum_i w_i = 0$
2. $\sum_i w_i^2 = 1 / \sum_i (x_i - \bar{x})^2$
3. $\sum_i w_i x_i = 1$

Einsetzen der PRF in die OLS Schätzfunktion $\widehat{\beta}_2$ gibt

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_2 &= \sum_i w_i y_i = \sum_i w_i (\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i) \\ &= \beta_1 \sum_i w_i + \beta_2 \sum_i w_i x_i + \sum_i w_i \varepsilon_i \\ &= \beta_2 + \sum_i w_i \varepsilon_i\end{aligned}$$

OLS Standardfehler

Die Varianz der Zufallsvariable $\widehat{\beta}_2$ ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\widehat{\beta}_2) &= \mathrm{E}[\widehat{\beta}_2 - \mathrm{E}(\widehat{\beta}_2)]^2 \\ &= \mathrm{E}[\widehat{\beta}_2 - \beta_2]^2 \qquad (\text{wenn } \mathrm{E}(\widehat{\beta}_2) = \beta_2) \\ &= \mathrm{E}\left(\sum_i w_i \varepsilon_i\right)^2 \qquad (\text{weil } \widehat{\beta}_2 = \beta_2 + \textstyle\sum w_i \varepsilon_i, \text{ s.o.}) \\ &= \mathrm{E}\left(w_1^2 \varepsilon_1^2 + w_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + w_n^2 \varepsilon_n^2 + \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots + 2 w_1 w_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \cdots + 2 w_{n-1} w_n \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n\right) \\ &= \underbrace{\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \varepsilon_i^2\right)}_{= \sigma^2 \sum_i w_i^2 \text{ wenn homoskedastisch}} + \underbrace{\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^{n} 2 w_i w_j \varepsilon_i \varepsilon_j\right)}_{= 0 \text{ wenn keine Autokorrelation}}\end{aligned}$$

OLS Standardfehler

Die Varianz der Zufallsvariable $\widehat{\beta}_2$ ist also

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\widehat{\beta}_2) &= \mathrm{E}\left(w_1^2\varepsilon_1^2 + w_2^2\varepsilon_2^2 + \cdots + w_n^2\varepsilon_n^2 + \cdots \right.\\ &\quad \left. \cdots + 2w_1w_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \cdots + 2w_{n-1}w_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\right)\end{aligned}$$

Mit zusätzlicher Annahme **A4**: $\boxed{\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}\left(0, \sigma^2\right)}$

d.h. wenn $\operatorname{var}(\varepsilon_i) := \mathrm{E}(\varepsilon_i)^2 = \sigma^2$ und $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) := \mathrm{E}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für $i \neq j$:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\widehat{\beta}_2) &= \mathrm{E}\left(w_1^2\sigma^2 + w_2^2\sigma^2 + \cdots + w_n^2\sigma^2 + \cdots \right.\\ &\quad \left. \cdots + 2w_1w_2 0 + \cdots + 2w_{n-1}w_n 0\right)\\ &= \sigma^2 \sum_i w_i^2 \qquad \text{mit } \sum_i w_i^2 = 1/\sum_i (x_i - \bar{x})^2, \text{(s.o.)}\\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\end{aligned}$$

OLS Standardfehler

Varianz des OLS Steigungskoeffizienten $\widehat{\beta}_2$:

$$\boxed{\operatorname{var}(\widehat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

- kann aber nicht geschätzt werden, da σ^2 ein unbeobachtbarer Parameter des DGP ist!
- Eine unverzerrte Schätzfunktion für σ^2 ist

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{n-k}}$$

mit $\hat{\varepsilon}_i$: OLS Residuen; $n-k$: Freiheitsgrade

OLS Standardfehler

Freiheitsgrade:

- Für jeden der insgesamt k zu schätzenden Parameter wird eine Bedingung 1. Ordnung (FOC) benötigt!
- z.B. $\sum_i \hat{\varepsilon}_i = 0$ und $\sum_i \hat{\varepsilon}_i x_i = 0$
- Jede FOC determiniert *ein* Residuum (*'verliert Freiheit'*)
- Für drei Residuen und FOC $\sum_{i=1}^{3} \hat{\varepsilon}_i = 0$:
  wenn $\hat{\varepsilon}_1 = -3$, $\hat{\varepsilon}_2 = 5$ folgt $\hat{\varepsilon}_3 = -2$!
- $\Rightarrow$ wenn k Koeffizienten geschätzt werden verbleiben $n-k$ Freiheitsgrade!

OLS Standardfehler

Standardfehler der Koeffizienten (Wurzel aus Varianz)

$$\widehat{\mathrm{se}}(\widehat{\beta}_2) := \hat{\sigma}_{\widehat{\beta}_2} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum [x_i - \bar{x}]^2}}, \qquad \widehat{\mathrm{se}}(\widehat{\beta}_1) := \hat{\sigma}_{\widehat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 \sum x_i^2}{n \sum [x_i - \bar{x}]^2}}$$

mit

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{n-k}$$

- Standardfehler (*standard error*) := Standardabweichung einer Schätzfunkt.
- Kennzahl für die Genauigkeit eines geschätzten Koeffizienten in Bezug auf die Stichprobenvariabilität!
- Werden für Hypothesentests benötigt.
- Sollten *immer* (!) unter (bzw. neben) Koeffizienten angegeben werden!

OLS Standardfehler

Determinanten der Standardfehler der Koeffizienten

('was macht eine Schätzung genau'?)

$$\widehat{\mathrm{se}}(\widehat{\beta}_2) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \qquad \text{mit } \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{n-k}$$

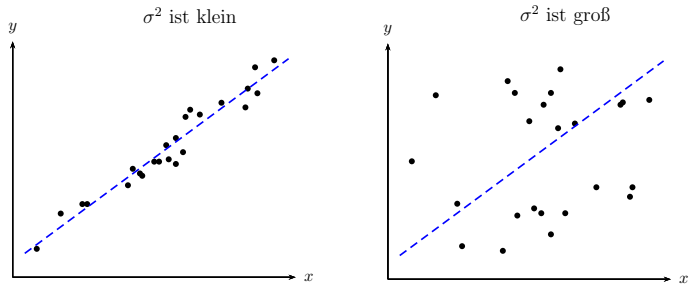
Ceteris paribus ist der Standardfehler umso kleiner, d.h. die Schätzung genauer, ...

1. je kleiner die Varianz der Störterme σ^2 (bzw. deren Schätzung $\hat{\sigma}^2$) ist,
2. je *größer* die Streuung der x ist, d.h., je größer $\sum_i (x_i - \bar{x})^2$) ist,
3. je größer n ist, da der Nenner $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ mit n zunimmt.
4. Multiple Regression: je weniger die x untereinander korreliert sind.

OLS Standardfehler

Determinanten der Standardfehler der Koeffizienten

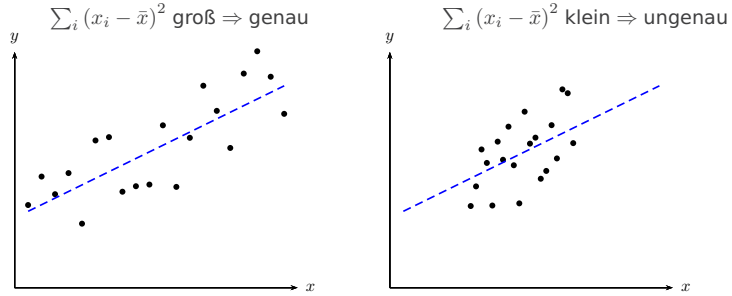
1) Regressionen mit unterschiedlicher Varianz von ε (σ^2):



OLS Standardfehler

Determinanten der Standardfehler der Koeffizienten

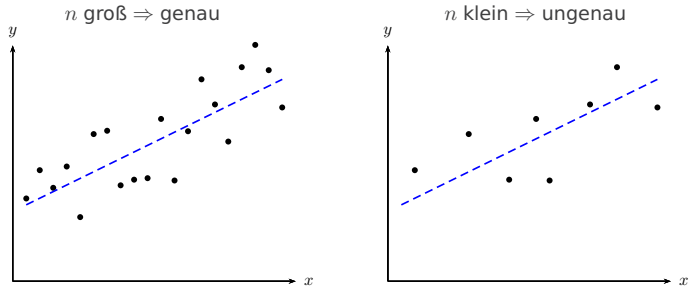
2) Unterschiedliche Streuung der erklärenden x Variable:



OLS Standardfehler

Determinanten der Standardfehler der Koeffizienten

3) Unterschiedliche Größe der Stichprobe (n):



OLS Standardfehler

Determinanten der Standardfehler der Koeffizienten

4) Multiple Regression:

$$y_i = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x_{i2} + \widehat{\beta}_3 x_{i3} + \cdots + \widehat{\beta}_h x_{ih} + \cdots + \widehat{\beta}_k x_{ik} + \hat{\varepsilon}_i$$

Standardfehler des Koeffizienten h:

$$\widehat{\mathrm{se}}(\widehat{\beta}_h) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{(1 - R_h^2)\sum_i (x_{ih} - \bar{x}_h)^2}}$$

mit R_h^2 Bestimmtheitsmaß der Hilfsregression:

$$x_{ih} = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 x_{i2} + \cdots + \widehat{\alpha}_{h-1} x_{ih-1} + \widehat{\alpha}_{h+1} x_{ih+1} + \cdots + \widehat{\alpha}_k x_{ik} + \nu_i \quad \rightarrow \quad R_h^2$$

$\Rightarrow$ je größer die lineare Abhängigkeit der x untereinander, je ungenauer die Schätzung!!! (Multikollinearität)

OLS Standardfehler

Robuste Standardfehler der Koeffizienten:

- Wenn

  A4: $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$

  verletzt sind OLS Standardfehler *falsch* (d.h. verzerrt)!!!
- Für solche Fälle wurden **robuste Standardfehler** (White, 1980) entwickelt.
- Falls A4 erfüllt sind diese zwar deutlich ungenauer,
  aber wenn A4 verletzt sind diese zumindest *konsistent* (d.h. werden mit zunehmender Stichprobengröße genauer).
- kommt später bei *Heteroskedastizität* ausführlicher ...

Effizienz: Gauss-Markov Theorem

Gauss-Markov Theorem

Unter den Gauss-Markov Annahmen A1 – A4 des 'klassischen linearen Regressionsmodells' haben OLS-Schätzfunktionen innerhalb der Klasse aller linearen und erwartungstreuen Schätzfunktionen die kleinste Varianz, oder in anderen Worten, sie sind **BLUE**, d.h. OLS ist ein **B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator.

Gauss-Markov Annahmen:

1. PRF ist linear und korrekt spezifiziert: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon$
2. $n \geq k$ und keine perfekte Multikollinearität
3. Störterme und Regressoren sind stochastisch unabhängig: $\mathrm{E}(\varepsilon_i | \mathbf{X}) = \mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$
4. Störterme sind i.i.d.: $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$

Effizienz: Gauss-Markov Theorem

OLS-Schätzfunktionen sind effizient, d.h. $\mathrm{var}(\widehat{\beta}_2^{\text{OLS}}) \leq \mathrm{var}(\tilde{\beta}_2)$
($\tilde{\beta}_2$ ist eine beliebige lineare erwartungstreue Schätzfunktion für β_2)

Beweisidee:

1. Starte mit beliebiger linearen Schätzfunktion, z.B. $\tilde{\beta} = \sum_i c_i y_i$
2. Ermitteln notwendige Bedingungen für Erwartungstreue: $\mathrm{E}(\tilde{\beta}) = \beta$ wenn $\sum_i c_i = 0$ und $\sum_i c_i x_i = 1$ (siehe Appendix)
3. Minimieren Varianz dieser linearen Schätzfunktion unter Nebenbedingung der Erwartungstreue:
   $\min$: $\mathrm{var}(\tilde{\beta})$ unter NB: $\sum_i c_i = 0$ und $\sum_i c_i x_i = 1$; $\rightarrow$ Lagrange
4. Lösung dieses Minimierungsproblems: $c_i = w_i$,
   also ist OLS Schätzfunktion *varianzminimal*!
   Beweisführung erfordert wieder Annahmen A1 – A4!

Zusammenfassung

Gauss-Markov Annahmen:

1. PRF ist linear und korrekt spezifiziert: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon$
2. $n \geq k$ und keine perfekte Multikollinearität
3. Störterme und Regressoren sind stochastisch unabhängig:
   $\mathrm{E}(\varepsilon_i|\mathbf{X}) = \mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$ (Spezialfall: $\mathrm{cov}(\varepsilon, x) = 0$)
4. Störterme sind i.i.d.: $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$

- **Erwartungstreue:** A1 – A3 müssen erfüllt sein.
- **Effizienz:** A1 – A4 müssen erfüllt sein.
  Falls A1 – A3 erfüllt aber A4 verletzt $\rightarrow$ OLS Standardfehler verzerrt!
  $\Rightarrow$ Hypothesentests und Konfidenzintervalle ungültig!!!

Thanx . . .

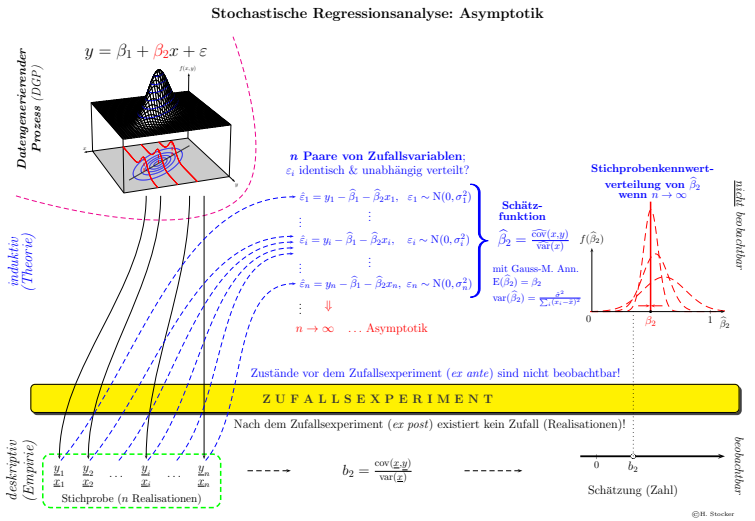
Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen: Asymptotik

Grundlagen der Ökonometrie

www.hsto.info/econometrics

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Bisher: Stichprobenkennwertverteilung selbst spielte keine Rolle, wir interessierten uns nur für deren ersten beiden Momente (Erwartungswert und Varianz)!
- Erwartungstreue & Effizienz: Beweise sind unabhängig von Stichprobengröße n!
- Diese Beweise erfordern strenge Annahmen, in komplexeren Fällen können Erwartungstreue & Effizienz häufig nicht bewiesen werden!
- $\Rightarrow$ Asymptotik!



Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Asymptotik: z.B. für arithm. Mittel μ

Folge von Schätzfunktionen $\{\hat{\mu}_n\}$, wenn sequentiell eine weitere Beobachtung dazukommt:

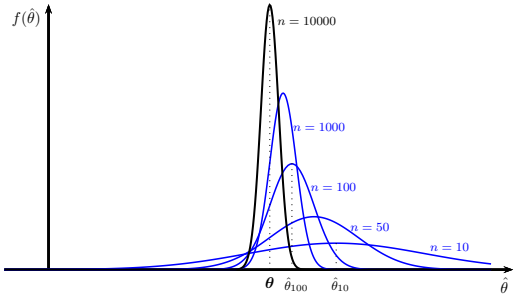
$$\{\hat{\mu}_n\} = \left\{ x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots, \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right\}$$

Wie entwickelt sich diese Folge, wenn $n \to \infty$?

$\Rightarrow$ Asymptotik!

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz:



Konsistente Schätzfunktionen *können* in kleinen Stichproben verzerrt sein, konvergieren aber mit steigendem Stichprobenumfang ($n \to \infty$) der Wahrscheinlichkeit nach gegen den wahren Wert θ.

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Definition:

Konsistenz

Wenn θ ein Parameter des DGP und $\hat{\theta}_n$ entsprechende Schätzfunktion für Stichprobe der Größe n, dann ist $\hat{\theta}_n$ eine *konsistente* Schätzfunktion für θ wenn für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left[|\hat{\theta}_n - \theta| < \delta \right] = 1 \qquad \text{mit } \delta > 0$$

$\Rightarrow$ die Wahrscheinlichkeit, dass mit $n \to \infty$ der Absolutbetrag der Differenz zwischen $\hat{\theta}_n$ und θ kleiner als *eine beliebig kleine Zahl* $\delta > 0$ wird, konvergiert mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen 1.

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Konsistente Schätzfunktionen folgen einem ‘Gesetz der Großen Zahl’
- **Gesetze der Großen Zahl:** mathematische Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie;
  $\Rightarrow$ unter welchen Umständen/Annahmen konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen gegen eine Konstante (z.B. Erwartungswert der ZV).
- wenn die Anzahl der Versuche gegen unendlich geht konvergiert die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der Erfolge im Intervall $(|\hat{\theta}_n - \theta| - \delta),\ (|\hat{\theta}_n - \theta| + \delta)$ liegt, für jedes noch so kleine $\delta > 0$ gegen Eins, bzw. dass es außerhalb des Intervalls liegt, gegen Null!
- Annahmen: variieren nach Gesetz; gelten ziemlich sicher für i.i.d. verteilte ZV
- Achtung: Annäherung ist nicht monoton! (Ausreißer immer möglich)
- *Beweis:* Chebychevs Ungleichung (s. Skript)

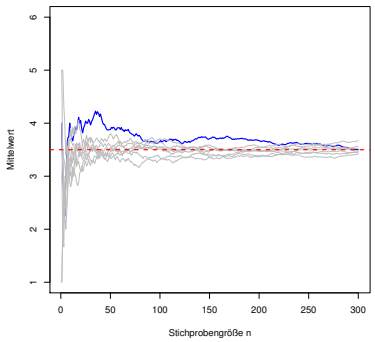
Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz: Beispiel Mittelwert der Augenzahl beim Würfeln (i.i.d.)

```
n <- 300; i <- 1:n
means <- cumsum(sample(x = 1:6, size = n, replace = TRUE))/i
```

z.B.

i	1	2	3	4	5	...
X	4	2	2	1	6	...
cumsum(X)	4	6	8	9	15	...
means	4.00	3.00	2.67	2.25	3.00	...



Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz: Schreibweisen

- Definition:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[|\hat{\theta}_n - \theta| < \delta\right] = 1 \qquad \text{mit } \delta > 0$$

- Kurzschreibweise 1: *'convergence in probability'*

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

- Kurzschreibweise 2: *'probability limit'*

$$\operatorname{plim} \hat{\theta}_n = \theta$$

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Rechnen mit 'probability-limits': (Konsistenz)
Für $\hat{\theta}_n$ und $\widehat{\vartheta}_n$ ZV mit $\operatorname{plim} \hat{\theta}_n = \theta$ und $\operatorname{plim} \widehat{\vartheta}_n = \vartheta$ (θ: *theta* und ϑ: *vartheta*)

1. Für Konstante c: $\operatorname{plim} c = c$
2. $\operatorname{plim}(\hat{\theta}_n + \widehat{\vartheta}_n) = \operatorname{plim} \hat{\theta}_n + \operatorname{plim} \widehat{\vartheta}_n = \theta + \vartheta$
3. $\operatorname{plim}(\hat{\theta}_n \widehat{\vartheta}_n) = \operatorname{plim} \hat{\theta}_n \operatorname{plim} \widehat{\vartheta}_n = \theta\vartheta$
4. $$\operatorname{plim}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\widehat{\vartheta}_n}\right) = \frac{\operatorname{plim} \hat{\theta}_n}{\operatorname{plim} \widehat{\vartheta}_n} = \frac{\theta}{\vartheta} \qquad (\text{für } \vartheta \neq 0)$$
5. Wenn $\hat{\theta}$ eine konsistente Schätzfunktion für θ und $h(\hat{\theta})$ eine stetige Funktion von $\hat{\theta}$ gilt
$$\operatorname{plim} h(\hat{\theta}) = h(\theta)$$

(3), (4) & (5) gelten nicht für Erwartungswertoperator $\Rightarrow$ plim Beweise einfacher!

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Asymptotische Normalverteilung

Asymptotische Normalverteilung

Eine Schätzfunktion ist *asymptotisch normalverteilt*, wenn deren normierte Stichprobenkennwertverteilung mit zunehmender Stichprobengröße gegen die Normalverteilung konvergiert.

Dahinterliegendes Konzept: *Konvergenz hinsichtlich der Verteilung ('Convergence in Distribution')*:

$\Rightarrow$ die Verteilung einer Folge von Schätzfunktionen $\hat{\theta}_n$ konvergiert mit zunehmendem Stichprobenumfang konvergiert unabhängig von der Verteilung des DGP gegen die Normalverteilung!
$\Rightarrow$ Zentrale Grenzwertsätze

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Asymptotische Normalverteilung: *'Convergence in Distribution'*

z.B. für arithmetisches Mittel $\hat{\theta}$ einer Folge von ZV x_i mit $x_i \sim \text{i.i.d.}(\theta, \sigma^2)$ und $0 < \sigma^2 < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma} \leq y \right\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} dz$$

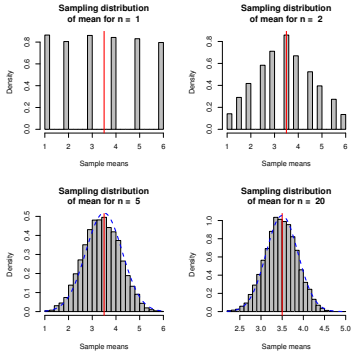
alternative Schreibweise

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

d.h. wenn $x_i \sim \text{i.i.d.}(\theta, \sigma^2)$ und $0 < \sigma^2 < \infty$, dann konvergiert die Verteilung von $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ gegen die Normalverteilung mit Mittelwert Null und Varianz σ^2

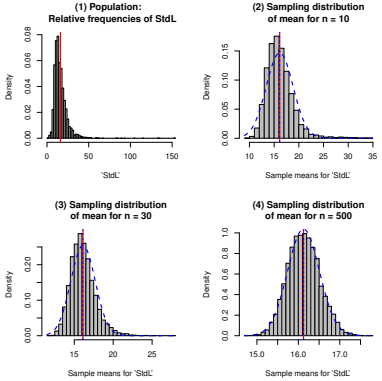
Asymptotische Normalverteilung

Beispiel 1: Würfeln, Vertlg. der Mittelw., je 10 000 Stichproben mit $n = 1, 2, 5, 20$



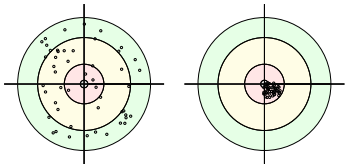
Asymptotische Normalverteilung

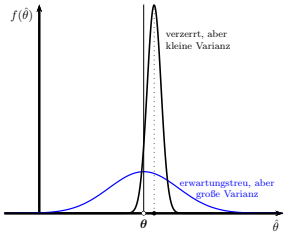
Beispiel 2: Stundenlöhne (EU-Silc AUT, 2015), Grundgesamtheit und Mittelwerte von je 10 000 Stichproben mit $n = 10, 30, 500$



Mean Square Error

Trade off zwischen Bias und Varianz:





Mean Square Error: (siehe Skript)

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\theta}) &= \mathrm{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= \mathrm{E}[\hat{\theta} - \mathrm{E}(\hat{\theta})]^2 + [\mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta]^2 \\ &= \mathrm{var}(\hat{\theta}) + [\text{Bias}(\hat{\theta})]^2 \end{aligned}$$

Thanx . . .